

Un modèle itératif de surfaces pour la construction en bois

Gilles Gouaty^{1,2}, Eric Tosan², Ivo Stotz¹, Yves Weinand¹

¹IBOIS - Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

²LIRIS UMR CNRS 5205 - Université Claude Bernard Lyon I

gilles.gouaty@epfl.ch, eric.tosan@liris.cnrs.fr, ivo.stotz@epfl.ch, yves.weinand@epfl.ch

Résumé

Dans le cadre de la construction en bois, nous nous intéressons à la modélisation de maillages surfaciques 3D basés sur un modèle itératif inspiré du modèle IFS (Iterated Function System). Les formes modélisées doivent satisfaire certaines propriétés afin d'assurer leur constructibilité physique.

Nous nous intéressons ici aux contraintes géométriques de planéité des faces d'un maillage quadrangulaire, permettant la construction d'assemblages de panneaux de bois découpés. Nous décrivons dans un premier temps un modèle permettant de représenter certains types de maillages à faces planes. Ce modèle est défini comme une certaine somme de deux courbes.

Nous présentons ensuite quelques propriétés élémentaires du modèle itératif que nous utilisons, inspiré du modèle IFS. Nous définissons enfin un modèle de surfaces générées par un opérateur de combinaison entre deux IFS décrivant chacun une certaine courbe. Nous montrons qu'il peut également être considéré comme un carreau à pôles généré par un produit d'IFS.

In the field of timber construction, we work on surface design that is based on an iterative model, which is inspired by the IFS model (Iterated Function System). The modelled figures must meet certain properties in order to ensure their physical feasibility.

For the construction of structures based on timber panels, we research in coplanarity constraints of quadrilateral meshes. First, we will introduce a particular model for a certain type of planar quadrilateral meshes. This model is defined as a sum of two curves.

Further, we present some basic properties of the iterative model employed, that is inspired by the IFS model. Finally, we define a surface model generated by an operator that combines two IFS, each describing a one curve. We show that the model studied can also be expressed as a pole surface obtained by an IFS product.

Mots clé : Informatique graphique, modélisation géométrique, modèle itératif, IFS, schéma de subdivision, maillages surfaciques, contraintes géométriques, maillages quadrangulaires, coplanarité.

grande diversité de formes, avec relativement peu de paramètres. Ce modèle itératif peut générer des formes lisses ou fractales, et généralise les schémas de subdivision classiques [TBSG⁺06] [SGW08].

1. Introduction

1.1. Contexte

Dans le cadre de la construction en bois de forme complexes, nous nous intéressons à la modélisation géométrique basée sur les modèles itératifs, et plus particulièrement, sur le modèle IFS. Ce modèle permet de représenter une

1.2. Contraintes liées à la construction

Le fait que les formes modélisées soient appliquées à la construction entraîne généralement un certain nombre de contraintes géométriques. Nous souhaitons notamment réaliser des structures surfaciques par assemblage de panneaux de bois [WEI08].

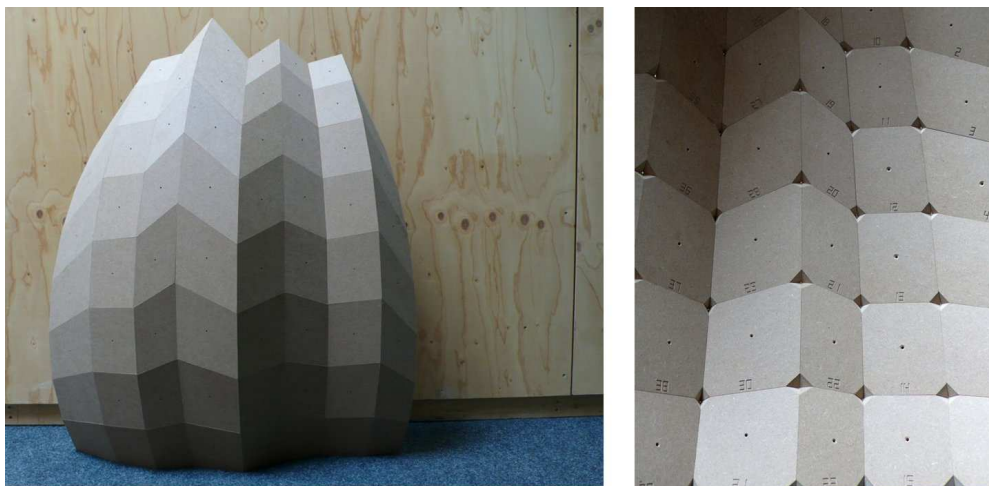


Figure 1: *Maquette réalisée par assemblage de panneaux quadrangulaires plans.*

Cela nécessite de modéliser des maillages composés de faces planes.

Nous nous intéressons ici à la modélisation de maillages quadrangulaires. La triangulation de maillages pour obtenir des faces planes est une solution que nous écartons. Ceci provient des contraintes liées à la construction, et plus particulièrement de la complexité à réaliser des assemblages autour de sommets de valence élevée. Les maillages triangulés, par exemple, présentent une valence moyenne de 6 tandis que les maillages à base de carreaux ont des sommets de valence 4. L'élaboration et la réalisation des solutions constructives sont relativement coûteuses en fonction de la valence du nœud. La valence des nœuds d'un maillage a une influence directe sur la géométrie des faces : plus la valence d'un sommet est élevée, plus les angles des faces avoisinant ces sommets seront aigus. Les faces à angles aigus ne sont pas souhaitables pour une application constructive parce que les éléments constructifs ont des coins fragiles et leur manipulation lors du processus de mise en œuvre devient une opération délicate.

1.3. Travaux précédents

Pottmann introduit l'utilisation des surfaces discrètes dans l'architecture. Ainsi dans l'article [POT07], les auteurs étudient plusieurs exemples d'utilisation de maillages discrets (triangulaires, quadrangulaires et hexagonaux). En ce qui concerne les études de maillages quadrangulaires, l'équipe de Pottmann utilise souvent la géométrie différentielle discrète. Les maillages à faces planes étudiés en [LIU06], [POT06] et [WANG06] sont des cas spécifiques qui représentent l'image discrète du réseau des lignes de courbure principales sur des surfaces lisses. En [POT06] et [WANG06] ces maillages sont appelés "circulaires" lorsque les quatre sommets de chaque face sont éléments

d'un même cercle, et sont appelés "coniques" lorsque les normales aux faces autour d'un sommet sont sur un même cône circulaire. Les maillages coniques présentent d'ailleurs des propriétés remarquables, comme celle permettant de générer des maillages "parallèles", tels que chaque face est à la même distance de la face correspondante dans le maillage d'origine. Les propriétés des maillages circulaires à sommets coniques sont discutées en détail dans les papiers cités ci-dessus. Liu et al. [LIU06] présentent des résultats très intéressants obtenus par modélisation géométrique utilisant des maillages coniques et des surfaces développables. Un intérêt particulier est porté dans l'emploi de modélisation itérative par subdivision en [LIU06].

Glymph et al. [GL04], définissent des modèles de surfaces discrètes par des opérateurs de balayage entre courbes discrètes. Les maillages obtenus sont constitués de trapèzes.

Bien que la méthode que nous proposons et la méthode proposée par Glymph [GL04] produisent des maillages quadrangulaires à faces planes, elles sont en fait très différentes des maillages étudiés par Pottmann, Liu et Wang. Les maillages que nous modélisons respectent uniquement la contrainte géométrique de la coplanarité des quatre sommets de chaque face, sans vérifier les propriétés géométriques qui sont spécifiques aux maillages coniques.

1.4. Méthode

Nous proposons une méthode basée sur un modèle itératif qui génère directement des maillages quadrangulaire à faces planes.

Nous partons d'une somme de Minkowski de deux courbes. Nous étendons les possibilités de création de formes en travaillant dans un espace \mathbb{R}^4 de coordonnées

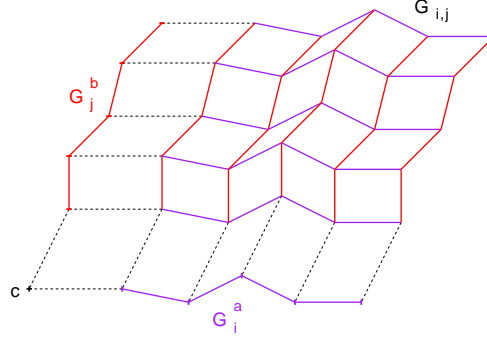


Figure 2: Construction d'un maillage par somme de lignes brisées.

homogènes, et en projetant les figures obtenues dans l'espace de modélisation \mathbb{R}^3 . L'utilisation de coordonnées homogènes permet d'étendre la méthode par des paramètres supplémentaires comme le poids de certains points.

Pour définir les courbes, nous utilisons le modèle IFS. Nous obtenons ainsi un modèle itératif de surface, qui répond aux contraintes tout en offrant une grande richesse dans la création de formes.

Nous avons précédemment développé un outil qui permet de générer et manipuler des formes fractales [TBSS⁺07] avec une interface graphique. L'utilisateur peut agir d'une part sur un ensemble de points de contrôle, à la manière des formes à pôles classiques, et d'autre part sur un ensemble de points de subdivision, permettant de moduler l'aspect lisse ou fractal. En nous basant sur ceci, nous mettons en œuvre un procédé permettant de saisir automatiquement des maillages quadrangulaires à faces planes.

2. Définition de surfaces par somme de courbes

Nous définissons un procédé permettant de construire une surface à partir de deux courbes quelconques. Nous décrivons dans un premier temps cet opérateur, indépendamment de la manière dont les courbes sont générées. Dans la partie 3, nous appliquerons cet opérateur à des courbes générées par IFS.

L'opérateur utilisé est basé sur la somme de Minkowski. Nous définissons cet opérateur, non pas dans un espace affine, mais dans un espace vectoriel "homogénéisé" de dimension plus élevée. Nous verrons par la suite que cela permet d'obtenir une gamme de formes plus générale que celles obtenues par somme de Minkowski dans l'espace affine initial.

2.1. Homogénéisation d'un espace affine

On notera (E, \vec{E}) un espace affine à coordonnées $(x, y, z)^T$. On lui associe son homogénéisation \hat{E} à coordon-

nées $(w, x, y, z)^T$ [GAL00]. On identifie E à l'hyperplan affine $w = 1$ et \vec{E} à l'hyperplan linéaire $w = 0$.

2.2. Somme centrée

Soit c un élément de \hat{E} , on définit un opérateur binaire \star sur \hat{E} par la combinaison affine suivante :

$$\begin{aligned} \star : \hat{E} \times \hat{E} &\rightarrow \hat{E}, \\ G_1 \star G_2 &= G_1 + G_2 - c. \end{aligned}$$

2.3. Interprétation en géométrie affine

On impose dans un premier temps comme restrictions aux paramètres G_1, G_2 et c d'appartenir à E , soit l'hyperplan $w = 1$ de \hat{E} . L'opérateur \star reste alors dans E , et peut s'interpréter comme une somme dans l'espace affine centré en c .

Cet opérateur permet de définir une surface comme la somme de Minkowski de deux courbes. Dans le cas où les courbes d'entrée sont des lignes brisées, les surfaces obtenues sont des maillages.

2.3.1. Maillages (cas discret)

On considère deux listes de points (G_i^a) et (G_j^b) définis dans E ainsi que $c \in E$. En composant ces deux listes par l'opérateur \star , on obtient une grille de points $(G_{i,j})$:

$$\begin{aligned} G_{i,j} &= G_i^a \star G_j^b, \\ &= G_i^a + G_j^b - c. \end{aligned}$$

La notation \overrightarrow{AB} des vecteurs de \vec{E} , avec A et B des points de E , est équivalente à la soustraction dans \hat{E} de $B - A$. La définition de l'opérateur \star peut s'écrire en utilisant les opérations basiques entre points et vecteurs de l'espace affine (E, \vec{E}) .

$$\begin{aligned} G_{i,j} &= G_i^a + G_j^b - c, \\ &= G_i^a + c \overrightarrow{G_j^b c}, \end{aligned}$$

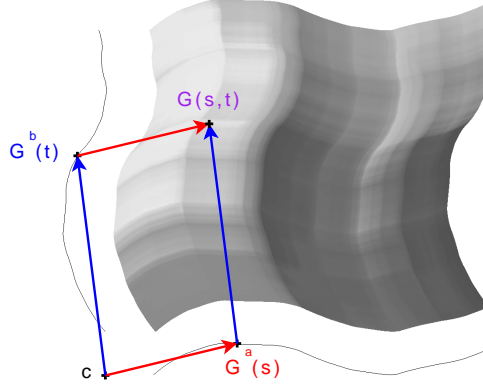


Figure 3: Construction d'une surface par somme de courbes.

$$\begin{aligned}
 &= G_j^b + c \overrightarrow{G_i^a}, \\
 &= c + c \overrightarrow{G_i^a} + c \overrightarrow{G_j^b}.
 \end{aligned}$$

Les listes (G_i^a) et (G_j^b) représentent des lignes brisées, dont les arêtes sont les couples (G_i^a, G_{i+1}^a) (resp. (G_j^b, G_{j+1}^b)). Ces arêtes sont combinées pour former les faces quadrangulaires d'un maillage (voir figure 2).

Chacune de ces faces est un parallélogramme. En effet, les bords hauts et bas de chaque face sont tous les deux images par translation d'une arête de G^a , de même que les bords droits et gauches sont images par translation d'une arête de G^b .

En effet, de manière générale, on a :

$$\begin{aligned}
 &G_{i_1,j_1} + \overrightarrow{G_{i_1,j_1} G_{i_2,j_1}} + \overrightarrow{G_{i_1,j_1} G_{i_1,j_2}} \\
 &= G_{i_1,j_2} + G_{i_2,j_1} - G_{i_1,j_1}, \\
 &= (G_{i_1}^a + G_{j_2}^b - c) + (G_{i_2}^a + G_{j_1}^b - c) - (G_{i_1}^a + G_{j_1}^b - c), \\
 &= G_{i_2}^a + G_{j_2}^b - c, \\
 &= G_{i_2,j_2}.
 \end{aligned}$$

En particulier, cette propriété est vérifiée pour chaque face $(G_{i,j}, G_{i+1,j}, G_{i,j+1}, G_{i+1,j+1})$:

$$\begin{aligned}
 G_{i+1,j+1} &= G_{i+1,j} + G_{i,j+1} - G_{i,j}, \\
 &= G_{i,j} + \overrightarrow{G_{i,j} G_{i+1,j}} + \overrightarrow{G_{i,j} G_{i,j+1}}.
 \end{aligned}$$

Les points du bord haut $G_{i,n-1}$ sont images par translation des points du bord bas $G_{i,0}$.

$$G_{i,n-1} = G_{i,0} + \overrightarrow{G_{0,0} G_{0,n-1}}.$$

2.3.2. Carreaux (cas continu)

On prend deux courbes paramétrées dans E :

$$\begin{aligned}
 G^a &: [0, 1] \rightarrow E, \\
 G^b &: [0, 1] \rightarrow E.
 \end{aligned}$$

L'opérateur \star appliqué à G^a et G^b génère alors une surface paramétrée (voir figure 3) :

$$\begin{aligned}
 G(s,t) &= G^a(s) \star G^b(t), \\
 &= G^a(s) + G^b(t) - c.
 \end{aligned}$$

Notons que la surface ainsi générée correspond alors au balayage d'une courbe par une autre. En particulier, les bords hauts et bas de la surface sont tous les deux images par translation de la courbe G^a , de même que les bords droits et gauches sont images par translation de la courbe G^b :

$$\begin{aligned}
 G(s,0) &= G^a(s) + c \overrightarrow{G^b(0)}, \\
 G(s,1) &= G^a(s) + \overrightarrow{G^b(0) G^b(1)}, \\
 G(0,t) &= G^b(s) + c \overrightarrow{G^a(0)}, \\
 G(1,t) &= G^b(s) + \overrightarrow{G^a(0) G^a(1)}.
 \end{aligned}$$

De manière analogue au cas discret, on a :

$$G(s_2, t_2) = G(s_1, t_2) + G(s_2, t_1) - G(s_1, t_1).$$

2.4. Interprétation en géométrie projective

Le procédé décrit précédemment permet de définir un ensemble de surfaces comme la somme de deux courbes. Les maillages générés ont la propriété d'être uniquement composés de parallélogrammes. Ceci constitue une limitation importante sur les maillages que l'on peut obtenir avec ce modèle.

Notre but est d'obtenir des maillages à faces planes, mais il n'est pas nécessaire que ces faces soient des parallélogrammes. L'utilisation des coordonnées homogènes présente l'intérêt suivant : l'image d'un parallélogramme par une transformation projective, est un quadrilatère plan, qui n'est pas forcément un parallélogramme.

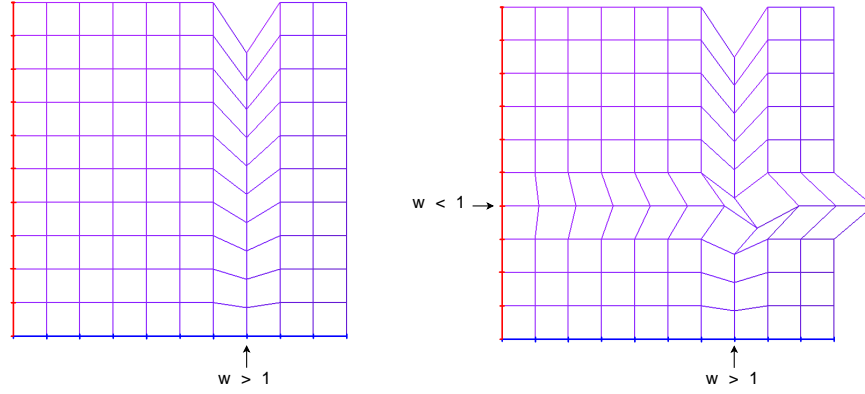


Figure 4: Maillages surfaciques obtenus par somme de lignes brisées définies en coordonnées homogènes. Effets dus à l'augmentation ou la diminution d'un poids sur un bord.

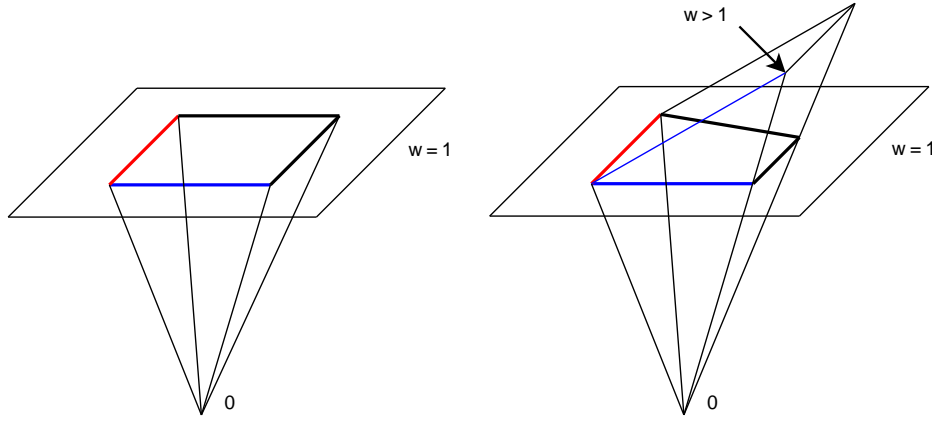


Figure 5: Visualisation dans l'espace homogène de l'augmentation du poids d'un point.

Nous généralisons le modèle précédent, de manière à générer des maillages dont les faces ne sont plus des parallélogrammes dans l'espace affine (E, \vec{E}) mais des parallélogrammes dans \hat{E} . L'utilisation des coordonnées homogènes $(w, x, y, z)^T$ permet de généraliser la combinaison de courbes.

2.4.1. Projection homographique

On définit une homographie Π , qui à chaque quadruplet $(w, x, y, z)^T \in \hat{E}$ associe sa projection centrée en 0 sur l'hyperplan $w = 1$:

$$\Pi(w, x, y, z)^T = \left(1, \frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}\right)^T.$$

L'opérateur \star défini précédemment peut s'appliquer à deux courbes définies dans \hat{E} et effectue leur somme dans ce même espace. La surface modélisée est obtenue par projection centrale de cette surface sur l'hyperplan $w = 1$.

Notons que la projection homographique Π ne conserve

pas \star . Le procédé que nous avons défini n'est donc pas équivalent à la somme des projections centrales des deux courbes.

2.4.2. Projection de la somme centrée

En posant $q^a = \Pi(G^a)$, $q^b = \Pi(G^b)$ et $q^c = \Pi(c)$, ainsi que w^a , w^b et w^c les composantes w des points G^a , G^b et c , la projection de la somme centrée $q = \Pi(G^a \star G^b)$ vérifie :

$$\begin{aligned} q &= \Pi(G^a \star G^b), \\ &= \frac{1}{w^a + w^b - w^c} (G^a + G^b - c), \\ &= \frac{w^a}{w^a + w^b - w^c} q^a + \frac{w^b}{w^a + w^b - w^c} q^b + \frac{w^c}{w^a + w^b - w^c} q^c. \end{aligned}$$

En prenant $w^c = 1$, et en posant $w^a = 1 + r^a$, $w^b = 1 + r^b$, on a $w^a + w^b - w^c = 1 + r^a + r^b$ et :

$$\begin{aligned} q &= \frac{1+r^a}{1+r^a+r^b} q^a + \frac{1+r^b}{1+r^a+r^b} q^b - \frac{1}{1+r^a+r^b} q^c, \\ &= q^a - \frac{r^b}{1+r^a+r^b} q^a + q^b - \frac{r^a}{1+r^a+r^b} q^b \\ &\quad - q^c + \frac{r^a+r^b}{1+r^a+r^b} q^c, \\ &= (q^a \star q^b) - \frac{r^b}{1+r^a+r^b} \overrightarrow{q^c q^a} - \frac{r^a}{1+r^a+r^b} \overrightarrow{q^c q^b}. \end{aligned}$$

Pour $w^a = 1$ et $w^b = 1$, on a $r^a = r^b = 0$ et il y a conservation de la somme centrée :

$$\Pi(G^a \star G^b) = q^a \star q^b.$$

Pour $w^a \neq 1$ et $w^b = 1$, on a $r^a \neq 0$ et $r^b = 0$ et la somme centrée subit une translation supplémentaire dans la direction $\overrightarrow{q^c q^b}$:

$$\Pi(G^a \star G^b) = (q^a \star q^b) - \frac{r^a}{1+r^a} \overrightarrow{q^c q^b}.$$

Pour $w^a \neq 1$ et $w^b \neq 1$, on a $r^a \neq 0$ et $r^b \neq 0$ et la somme centrée subit deux translations supplémentaires dans les directions $\overrightarrow{q^c q^a}$ et $\overrightarrow{q^c q^b}$:

$$\Pi(G^a \star G^b) = (q^a \star q^b) - \frac{r^b}{1+r^a+r^b} \overrightarrow{q^c q^a} - \frac{r^a}{1+r^a+r^b} \overrightarrow{q^c q^b}.$$

2.4.3. Projection de parallélogrammes

Le parallélogramme $(G_{i_1,j_1}, G_{i_2,j_1}, G_{i_1,j_2}, G_{i_2,j_2})$ est défini par quatre points de \hat{E} tels que :

$$G_{i_2,j_2} = G_{i_2,j_1} + G_{i_1,j_2} - G_{i_1,j_1}.$$

Sa projection dans \mathbb{R}^3 est un quadrilatère de sommets $(q_{i_1,j_1}, q_{i_2,j_1}, q_{i_1,j_2}, q_{i_2,j_2})$ avec $q_{i,j} = \Pi(G_{i,j})$.

Les points projetés sont coplanaires :

$$\begin{aligned} q_{i_2,j_2} &= \frac{G_{i_2,j_2}}{w_{i_2,j_2}}, \\ &= \frac{1}{w_{i_2,j_2}} (G_{i_2,j_1} + G_{i_1,j_2} - G_{i_1,j_1}), \\ &= \frac{1}{w_{i_2,j_2}} (w_{i_2,j_1} q_{i_2,j_1} + w_{i_1,j_2} q_{i_1,j_2} - w_{i_1,j_1} q_{i_1,j_1}), \\ &= \frac{w_{i_2,j_1}}{w_{i_2,j_2}} q_{i_2,j_1} + \frac{w_{i_1,j_2}}{w_{i_2,j_2}} q_{i_1,j_2} - \frac{w_{i_1,j_1}}{w_{i_2,j_2}} q_{i_1,j_1}. \end{aligned}$$

$$\text{avec } \frac{w_{i_2,j_1}}{w_{i_2,j_2}} + \frac{w_{i_1,j_2}}{w_{i_2,j_2}} - \frac{w_{i_1,j_1}}{w_{i_2,j_2}} = 1.$$

2.4.4. Projection de maillages

Tout maillage de \hat{E} projeté $q_{ij} = \Pi(G_{ij})$ avec $G_{i,j} = G_i^a \star G_j^b$ est composé de facettes quadrangulaires planes

$(q_{i,j}, q_{i+1,j}, q_{i,j+1}, q_{i+1,j+1})$ car :

$$q_{i+1,j+1} = \frac{w_{i+1,j}}{w_{i+1,j+1}} q_{i+1,j} + \frac{w_{i,j+1}}{w_{i+1,j+1}} q_{i,j+1} - \frac{w_{i,j}}{w_{i+1,j+1}} q_{i,j}.$$

$$\text{avec } \frac{w_{i+1,j}}{w_{i+1,j+1}} + \frac{w_{i,j+1}}{w_{i+1,j+1}} - \frac{w_{i,j}}{w_{i+1,j+1}} = 1.$$

2.4.5. Influence des poids

Sur les nœuds (i, j) où $w_i^a = 1$, $w_j^b = 1$, il y a conservation de la somme centrée :

$$q_{i,j} = q_i^a \star q_j^b.$$

Si $w_k^a = 1 + r_k^a$, la colonne k du maillage est modifiée :

$$q_{k,j} = (q_k^a \star q_j^b) - \frac{r_k^a}{1+r_k^a} (q_j^b - q^c).$$

Si $w_k^a = 1 + r_k^a$ et $w_l^b = 1 + r_l^b$, la colonne k et la ligne l sont modifiées (Voir figures 4 et 5) :

$$q_{k,j} = (q_k^a \star q_j^b) - \frac{r_k^a}{1+r_k^a} (q_j^b - q^c),$$

$$q_{i,l} = (q_i^a \star q_l^b) - \frac{r_l^b}{1+r_l^b} (q_i^a - q^c),$$

$$\begin{aligned} q_{k,l} &= (q_k^a \star q_l^b) - \frac{r_l^b}{1+r_k^a+r_l^b} (q_k^a - q^c) \\ &\quad - \frac{r_k^a}{1+r_k^a+r_l^b} (q_l^b - q^c). \end{aligned}$$

2.4.6. Projection de carreaux

Le carreau paramétré dans E est défini par la projection de la somme centrée des arcs paramétrés :

$$q(s, t) = \Pi(G^a(s) \star G^b(t)).$$

Il vérifie la propriété de planéité locale suivante. Pour tout quadruplets de nombres $0 \leq s_1 < s_2 \leq 1$ et $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, le quadrilatère formé par les points $(q(s_1, t_1), q(s_2, t_1), q(s_1, t_2), q(s_2, t_2))$ est l'image par Π du parallélogramme $(G(s_1, t_1), G(s_2, t_1), G(s_1, t_2), G(s_2, t_2))$.

3. Modélisation itérative

Le modèle IFS permet de représenter des courbes ou des surfaces par subdivisions successives, selon un certain niveau d'itération donné. Cependant, contrairement aux schémas de subdivision classiques, les formes limites obtenues peuvent ne pas être lisses mais fractales [TBSG⁺06] (voir figure 6).

La méthode de construction de surfaces par somme de courbes, vue précédemment, permet de générer automatiquement des maillages quadrangulaires à faces planes, quelles que soient les deux courbes passées en entrée. Dans cette partie, nous appliquons cette méthode, en utilisant comme paramètres des courbes définies par IFS.

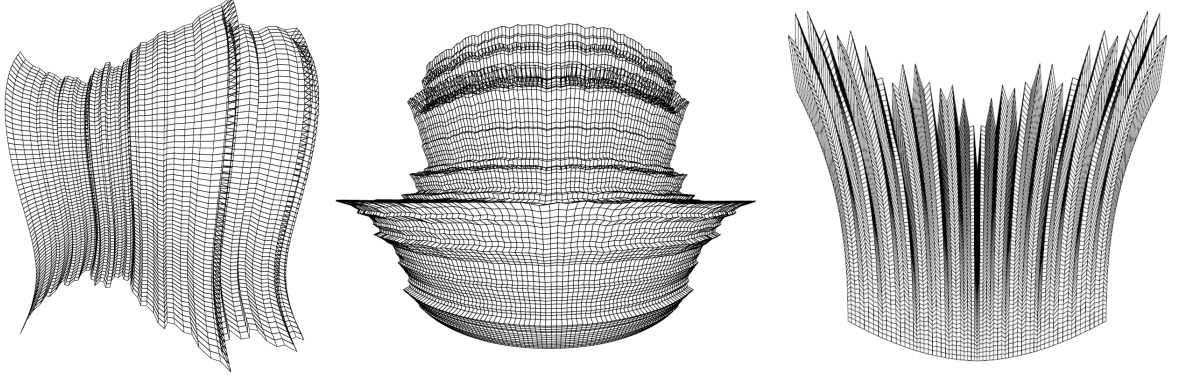


Figure 6: Exemples de maillages obtenus par la méthode que nous proposons.

3.1. Rappels sur les IFS

3.1.1. Définition d'un IFS

Un IFS est une famille finie d'opérateurs contractants T_i sur un espace métrique complet. Pour faire le lien par la suite avec les formes à pôles, on choisit un espace barycentrique $B(\mathbb{R}^J)$, c'est-à-dire à coordonnées $(\kappa_j)_{j \in J}$ telles que [ZT96] :

$$\sum_{j \in J} \kappa_j = 1.$$

À un IFS est associé un attracteur A , unique compact non vide de $B(\mathbb{R}^J)$ vérifiant [BAR88] :

$$A = \bigcup_i T_i A.$$

On prend des IFS composés de matrices de subdivision T_i opérant sur $B(\mathbb{R}^J)$, c'est-à-dire telles que la somme des coefficients sur chaque colonne soit égale à 1. Les opérateurs T_i étant indicés dans l'ensemble fini $\Sigma = \{0, \dots, N-1\}$, chaque point de A est indexé par une fonction d'adressage $\Phi : \Sigma^\omega \rightarrow B(\mathbb{R}^J)$. Le calcul de cette fonction s'effectue en appliquant des produits infinis de T_i sur un point κ quelconque de $B(\mathbb{R}^J)$:

$$\Phi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\sigma_1} \dots T_{\sigma_n} \kappa.$$

3.1.2. Formes à pôles

On distingue l'espace de modélisation \hat{E} et espace d'itération $B(\mathbb{R}^J)$ avec J un ensemble fini d'indices. En introduisant une projection affine P qui permet de passer de l'un à l'autre, nous avons pu représenter les formes à pôles avec le modèle IFS [ZT96]. P est une matrice $4 \times |J|$ dont les colonnes sont assimilables à des points de contrôle d'une forme

à pôles :

$$P\Phi(\sigma) = \sum_{j \in J} \Phi_j(\sigma) p_j,$$

avec $P = (p_j)_{j \in J}$ famille de points de contrôle, et $\Phi = (\Phi_j)_{j \in J}$ famille de fonctions de mélange correspondante.

Les formes à pôles itératives constituent des familles à deux types de paramètres : les coordonnées des points de contrôle p_j et les coefficients des matrices de subdivision T_i . Comme dans l'approche CAO classique, la manipulation des points de contrôle permet d'effectuer des déformations globales. La manipulation des matrices de subdivision T_i permet en plus de moduler l'aspect local, passer du lisse au rugueux. Les valeurs des coefficients de mélange $\Phi_j(\sigma)$ sont des fonctions analytiques des coefficients des matrices de subdivision [ZT96].

3.2. Modèle itératif des courbes et des surfaces

Nous définissons les arcs paramétrés $G^a(s)$ et $G^b(t)$ à partir des Φ^a et Φ^b fonctions d'adressage associées à des IFS :

$$\begin{aligned} G^a(s) &= P^a \Phi^a(\sigma), \\ G^b(t) &= P^b \Phi^b(\tau). \end{aligned}$$

avec :

- $\Sigma_a = \{0, \dots, N_a - 1\}$, $\Sigma_b = \{0, \dots, N_b - 1\}$;
- $(T_i^a)_{i \in \Sigma_a}$, $(T_i^b)_{i \in \Sigma_b}$, deux IFS vérifiant certaines conditions de raccord pour générer des courbes (voir 3.4.3) ;
- σ développement en base N_a de $s \in [0, 1]$;
- τ développement en base N_b de $t \in [0, 1]$;
- $J^a = \{0, \dots, m_a - 1\}$ et $J^b = \{0, \dots, m_b - 1\}$ indices des points de contrôle.

Nous définissons les carreaux paramétrés comme somme de ces deux arcs à pôles :

$$G(s, t) = P^a \Phi^a(\sigma) \star P^b \Phi^b(\tau).$$

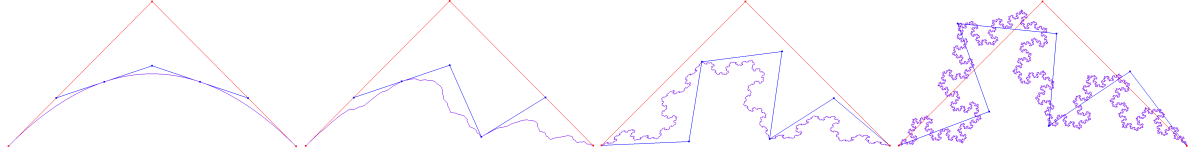


Figure 7: Saisie interactive des paramètres de subdivision d'une courbe, par manipulation des points de subdivision (en bleu). Les points rouges représentent les points de contrôle. Trois opérateurs affines T_0^a , T_1^a et T_2^a sont utilisés sur cet exemple. Chacun de ces opérateurs associe les trois points de contrôle, à un ensemble de trois points de subdivision consécutifs. Le déplacement des points de subdivision entraîne la mise à jour des opérateurs de subdivision associés à ce point [TBSS⁺07].

3.3. Calcul itératif des maillages

Les lignes brisées qui approximent les arcs sont données par :

$$\begin{aligned} p_i^{a(n)} &= G_n^a(s_i), \\ &= P^a T_{\sigma_1}^a \dots T_{\sigma_n}^a \kappa_0^a; \end{aligned}$$

avec :

- $\sigma_1 \dots \sigma_n 0^a$ développement de $s_i = \frac{i}{N_a}$ en base N_a ,
- $\kappa_0^a \in \mathbb{R}^{J^a}$.

De même :

$$\begin{aligned} p_j^{b(n)} &= G_n^b(t_j), \\ &= P^b T_{\tau_1}^b \dots T_{\tau_n}^b \kappa_0^b; \end{aligned}$$

avec :

- $\tau_1 \dots \tau_n 0^b$ développement de $t_j = \frac{j}{N_b}$ en base N_b ,
- $\kappa_0^b \in \mathbb{R}^{J^b}$.

Les maillages qui approximent les carreaux sont donnés par :

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{(n)} &= G_n(s_i, t_j), \\ &= G_n^a(s_i) \star G_n^b(t_j), \\ &= p_i^{a(n)} \star p_j^{b(n)}. \end{aligned}$$

3.4. Interprétation en géométrie affine

On prend les points de contrôle (p_i^a) et (p_j^b) dans E , c'est-à-dire tels que leurs composantes w_i^a et w_j^b soient égales à 1.

3.4.1. Somme d'arcs

Le modèle itératif affine peut s'écrire comme un carreau à pôles dont les points de contrôle sont les p_i^a, p_j^b et c :

$$\begin{aligned} G(s, t) &= P^a \Phi^a(\sigma) \star P^b \Phi^b(\tau), \\ &= \sum_i \Phi_i^a(\sigma) p_i^a + \sum_j \Phi_j^b(\tau) p_j^b - c. \end{aligned}$$

avec $\sum_i \Phi_i^a(\sigma) + \sum_j \Phi_j^b(\tau) - 1 = 1$.

3.4.2. Produit d'arcs

On définit un opérateur \bullet permettant d'adresser un élément de la surface en fonction des adresses associées dans chacune des deux courbes :

$$\begin{aligned} k \bullet l &= m_{ak} + l, \\ \sigma \bullet \tau &= \sigma_1 \bullet \tau_1 \dots \sigma_n \bullet \tau_n \dots \end{aligned}$$

Le modèle itératif affine peut également s'écrire comme un carreau à pôles défini par un IFS :

$$\begin{aligned} G(s, t) &= (P^a \star P^b) \Phi(\sigma \bullet \tau), \\ &= \sum_{i,j} p_{i,j} \Phi_{i,j}(\sigma \bullet \tau). \end{aligned}$$

C'est un carreau à pôles avec :

- la grille de contrôle $P^a \star P^b = (p_{i,j})_{(i,j) \in J^a \times J^b}$ obtenue par somme des polygones de contrôle des arcs : $p_{i,j} = p_i^a \star p_j^b$;
- les fonctions de mélange sont obtenues par produit $\Phi_{i,j}(\sigma \bullet \tau) = \Phi_i^a(\sigma) \Phi_j^b(\tau)$.

En effet, comme $\sum_i \Phi_i^a(\sigma) = 1$ et $\sum_j \Phi_j^b(\tau) = 1$ nous avons la propriété suivante :

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} (p_i^a \star p_j^b) \Phi_i^a(\sigma) \Phi_j^b(\tau) \\ &= \sum_{i,j} (p_i^a + p_j^b - c) \Phi_i^a(\sigma) \Phi_j^b(\tau), \\ &= \sum_{i,j} \Phi_i^a(\sigma) \Phi_j^b(\tau) p_i^a + \sum_{i,j} \Phi_i^a(\sigma) \Phi_j^b(\tau) p_j^b \\ &\quad - \sum_{i,j} \Phi_i^a(\sigma) \Phi_j^b(\tau) c, \\ &= \left(\sum_i \Phi_i^a(\sigma) p_i^a \right) \left(\sum_j \Phi_j^b(\tau) \right) \\ &\quad + \left(\sum_i \Phi_i^a(\sigma) \right) \left(\sum_j \Phi_j^b(\tau) p_j^b \right) \\ &\quad - \left(\sum_i \Phi_i^a(\sigma) \right) \left(\sum_j \Phi_j^b(\tau) \right) c, \\ &= \sum_i \Phi_i^a(\sigma) p_i^a + \sum_j \Phi_j^b(\tau) p_j^b - c. \end{aligned}$$

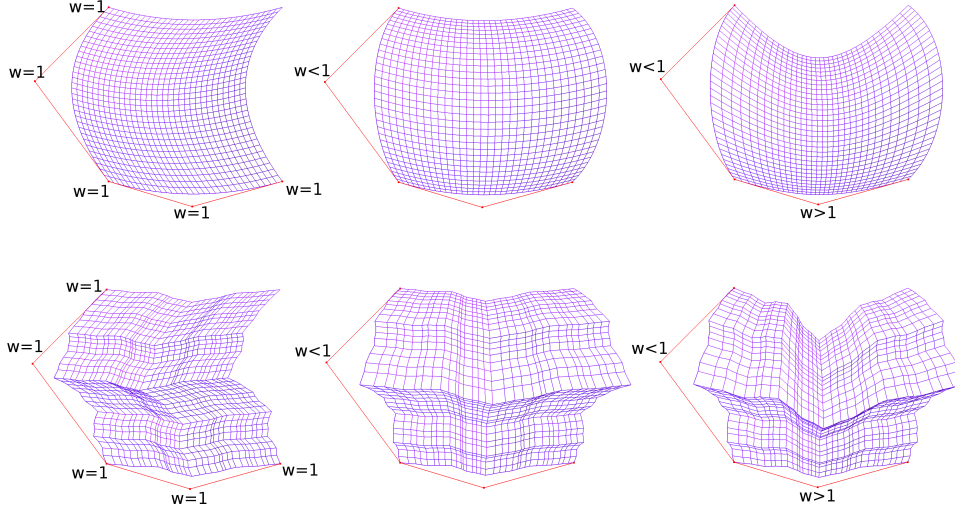


Figure 8: Maillages surfaciques obtenus par déformation homographique d'une somme de courbes générées par des IFS affines. La modification du poids des points de contrôle entraîne une variation globale de la forme en conservant ses aspects locaux. En haut, on utilise un IFS qui génère une surface lisse. En bas, les matrices de subdivision ont été modifiées pour obtenir une surface fractale.

De plus le produit tensoriel $\Phi(\sigma \bullet \tau) = \Phi^a(\sigma) \otimes \Phi^b(\tau)$ est une fonction d'adressage engendrée par le produit tensoriel d'IFS $(T_i^a \otimes T_j^b)_{i \in \Sigma_a, j \in \Sigma_b}$ [ZT96].

3.4.3. Saisie interactive des paramètres dans E

Les paramètres de cette famille de carreaux sont les points de contrôle des arcs de courbe : $P^a = (p_j^a)$ et $P^b = (p_j^b)$ ainsi que les matrices de subdivision T_i^a et T_i^b vérifiant un ensemble d'équations de raccord. Nous avons précédemment développé une méthode traitant de manière formelle ce type de contraintes [TBSS⁺07]. Les paramètres indépendants du système sont saisis de manière interactive dans une interface graphique. La saisie s'effectue en déplaçant un ensemble de points de contrôle et de points de subdivision dans E (voir figure 7). Le déplacement de ces points entraîne la mise à jour de coefficients dans les matrices, tout en conservant les contraintes de raccord.

Chaque point de contrôle p_k^a (resp p_k^b) correspond à la k -ième colonne de la matrice P^a (resp P^b) :

$$p_k^a = P^a e_k.$$

Chaque point de subdivision $p_{i,k}^a$ (resp $p_{j,k}^b$) correspond à la k -ième colonne de la matrice $P^a T_i^a$ (resp $P^b T_j^b$) :

$$p_{i,k}^a = P^a T_i^a e_k.$$

En raison des équations de raccord, à chacun des points de subdivision peuvent être associées plusieurs colonnes dans les matrices de subdivision. En effet :

$$T_i^a e_k = T_j^a e_l$$

$$\Rightarrow P^a T_i^a e_k = P^a T_j^a e_l.$$

3.5. Interprétation en géométrie projective

On prend les points de contrôle (p_i^a) et (p_j^b) dans \hat{E} , c'est-à-dire tels que leurs composantes w_i^a et w_j^b puissent être différentes de 1.

3.5.1. Projection de somme

Le modèle itératif projeté de carreau s'écrit comme une combinaison affine dans E :

$$\begin{aligned} q(s, t) &= \Pi \left(P^a \Phi^a(\sigma) \star P^b \Phi^b(\tau) \right), \\ &= \Pi \left(\sum_i \Phi_i^a(\sigma) p_i^a + \sum_j \Phi_j^b(\tau) p_j^b - c \right), \\ &= \sum_i \tilde{\Phi}_i^a(\sigma, \tau) q_i^a + \sum_j \tilde{\Phi}_j^b(\sigma, \tau) q_j^b - \tilde{\Phi}^c(\sigma, \tau) p^c. \end{aligned}$$

C'est un carreau à pôles dont les points de contrôle sont $q_i^a = \Pi(p_i^a)$, $q_j^b = \Pi(p_j^b)$, et $q^c = \Pi(c)$ et les fonctions de mélange sont les fractions :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_i^a(\sigma, \tau) &= \frac{\Phi_i^a(\sigma) w_i^a}{w(\sigma, \tau)}, \\ \tilde{\Phi}_j^b(\sigma, \tau) &= \frac{\Phi_j^b(\tau) w_j^b}{w(\sigma, \tau)}, \\ \tilde{\Phi}^c(\sigma, \tau) &= \frac{1}{w(\sigma, \tau)}, \end{aligned}$$

$$\text{avec } w(\sigma, \tau) = \sum_i \Phi_i^a(\sigma) w_i^a + \sum_j \Phi_j^b(\tau) w_j^b - 1.$$

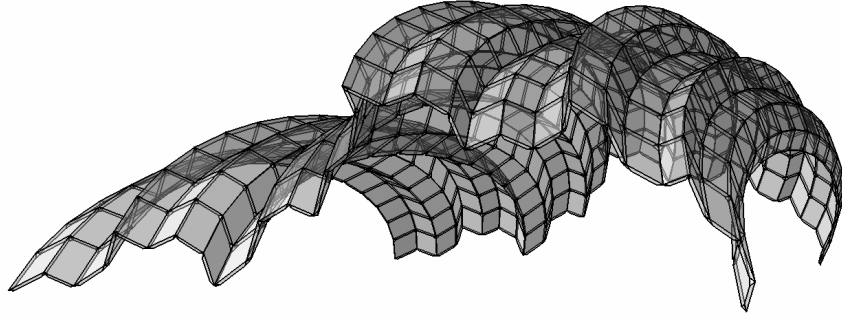


Figure 9: Structure d'un maillage volumique en vue d'une réalisation en panneaux de bois. Chaque face de la figure géométrique initiale est épaissie et chanfreinée pour former un ensemble d'éléments de construction cohérent.

3.5.2. Projection de produit

Le modèle itératif projeté peut également s'écrire comme un carreau à pôles défini par un IFS obtenu par produit tensoriel :

$$\begin{aligned} q(s, t) &= \Pi \left((P^a \star P^b) \Phi(\sigma \bullet \tau) \right), \\ &= \Pi \left(\sum_{i,j} p_{i,j} \Phi_{i,j}(\sigma \bullet \tau) \right), \\ &= \Pi(P^a \star P^b) \tilde{\Phi}(\sigma \bullet \tau). \end{aligned}$$

C'est un carreau à pôles dont les points de contrôle sont $q_{i,j} = \Pi(p_i^a \star p_j^b)$ et les fonctions de mélange sont les fractions :

$$\tilde{\Phi}_{i,j}(\sigma \bullet \tau) = \frac{\Phi_{i,j}(\sigma \bullet \tau) w_{i,j}(\sigma \bullet \tau)}{w(\sigma \bullet \tau)},$$

avec $w(\sigma \bullet \tau) = \sum_{i,j} w_{i,j}(\sigma \bullet \tau)$.

Étant une projection de somme, la grille de contrôle $\Pi(P^a \star P^b)$ est composée de faces planes.

3.5.3. Saisie interactive des paramètres dans \hat{E}

L'interface de saisie interactive permet de déplacer les points de contrôle et les points de subdivision, et en plus de moduler leur poids.

Les points de contrôle p_i^a et p_j^b dans \hat{E} sont définis par la donnée de points de contrôle q_i^a et q_j^b dans E et celle de poids w_i^a et w_j^b car on a :

$$\begin{aligned} p_i^a &= w_i^a q_i^a, \\ p_j^b &= w_j^b q_j^b. \end{aligned}$$

La modification du poids d'un point revient à multiplier ses coordonnées homogènes par un certain facteur. Ceci permet d'effectuer des déformations homographiques (voir figure 8).

4. Application à la construction

La méthode de surface proposée permet la génération d'une gamme de figures nouvelles, tout en répondant aux critères de planéité. Ainsi, elle offre aux concepteurs architectes un outil de modélisation de formes libres, permettant la création de structures a priori constructibles. L'implémentation du modèle sous forme d'un logiciel CAO permet à l'architecte la manipulation simple et intuitive des figures géométriques, à l'aide d'une interface graphique d'utilisateur. La figure 6 montre quelques exemples de figures que l'on peut obtenir par la méthode proposée.

Dans le cadre plus large de cette recherche interdisciplinaire, l'architecte peut alors aisément se servir de ces figures géométriques, épaissir ses faces et traiter les détails d'assemblage le long des arêtes pour obtenir des éléments de construction : des panneaux quadrilatéraux chanfreinés (voir figure 9). Dans le cas général, ces éléments constructifs sont tous du même type mais géométriquement différents. Cette propriété permet d'automatiser la génération de plans d'exécution, qui sont dans le cas présent des fichiers machine pour la fabrication numérique. La fonction d'adressage, introduite en 3.1.1, peut servir à l'organisation des éléments de construction au niveau logistique. L'adressage nécessaire pour optimiser les coûts de production et pour réaliser le montage de ce genre de constructions est directement proposé par le modèle IFS.

La figure 10 montre la réalisation d'un prototype se basant sur la méthode de surface présentée.

5. Conclusion et perspectives

Le modèle itératif que nous proposons ne se limite pas à des surfaces développables, ni même différentiables, localement assimilables à un plan. Si les maillages obtenus possèdent bien des faces planes, les arêtes peuvent être vives (voir figure 6).

Le concepteur peut définir des familles de maillages véri-

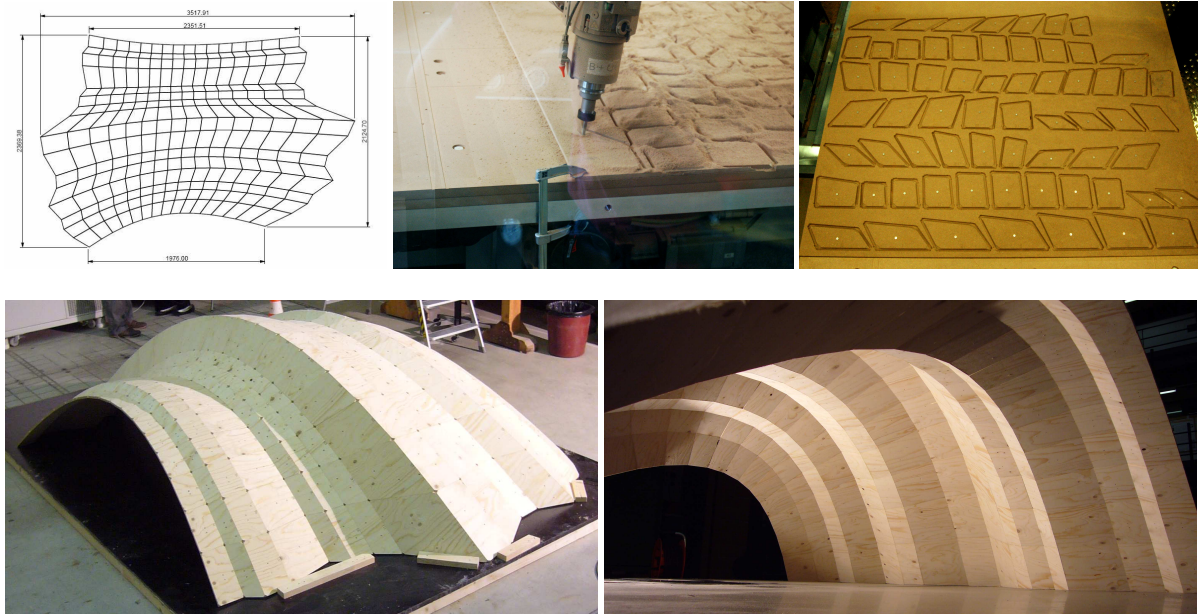


Figure 10: Étude d'application à la construction : plan de fabrication des pièces, et structure en bois assemblée.

fiant la contrainte de planéité des faces, puis en moduler la forme et l'aspect avec une saisie interactive des paramètres.

Le nombre de ces paramètres est relativement limité, la surface étant entièrement déterminée par la donnée de deux courbes à pôles dans $\hat{E} = \mathbb{R}^4$. Une amélioration possible de ce modèle permettrait notamment de contrôler directement les quatre courbes de bords de cette surface, ce qui permettrait une plus grande souplesse dans le contrôle de la surface.

Enfin, ce modèle permet uniquement de générer des maillages quadrangulaires. Nous avons comme perspective de mettre en œuvre un procédé plus général, permettant d'établir des contraintes de coplanarité pour des IFS surfaciques dont les maillages seraient de topologie quelconque. Ce procédé n'utiliserait donc pas d'opérateur de combinaison. Il s'agit d'établir des contraintes sur les paramètres d'un IFS surfacique.

Références

- [BAR88] M.F. BARNSLEY. *Fractal Everywhere*. Academic press, INC, 1988.
- [SGW08] STOTZ I., GOUATY G., WEINAND Y. : IFS-Modeling for Feasible Freeform Timber Constructions. In *10th World Conference on Timber Engineering* (Miyazaki, Japan, 2008).
- [WEI08] WEINAND Y. : Innovative Timber Construction. In *10th World Conference on Timber Engineering* (2008).
- [TBSG⁺06] E. TOSAN, I. BAILLY-SALINS, G. GOUATY, I. STOTZ, P. BUSER, and Y. WEINAND. Une modélisation géométrique itérative basée sur les automates. In *GTMG 2006, Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique*, Cachan, pages 155–169, 22-23 Mars 2006.
- [TBSS⁺07] E. TOSAN, I. BAILLY-SALINS, I. STOTZ, G. GOUATY, and Y. WEINAND. Modélisation itérative de courbes et surfaces : aspect multirésolution. In *GTMG 2007, Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique*, Valenciennes, 21-22 Mars 2007.
- [ZT96] Chems Eddine ZAIR and Eric TOSAN. Fractal modeling using free form techniques. *Computer Graphics Forum*, 15(3) :269–278, August 1996. EUROGRAPHICS'96 Conference issue.
- [POT07] Helmut POTTSMANN and BRELL-COKCAN, Sigrid and Johannes WALLNER. Discrete Surfaces for Architectural Design methods. In *Curves and Surface*

- Design : Avignon 2006*, pages 213–234. Nashboro Press, 2007.
- [LIU06] Y. LIU, H. POTTMANN, J. WALLNER, W. WANG, Y.-L. YANG. Geometric Modeling with Conical Meshes and Developable Surfaces. In *ACM Trans. Graphics* 25/3 (2006), 681-689, Proc. SIGGRAPH 2006.
- [POT06] H. POTTMANN, J. WALLNER. The focal geometry of circular and conical meshes. In *Geometry preprint* 163, Technische Universität Wien, 2006
- [WANG06] W. WANG, J. WALLNER, Y. LIU. An angle criterion for conical mesh vertices. In *Geometry preprint* 157, Technische Universität Wien, 2006
- [GL04] GLYMPH, J., SHELDEN, D., CECCATO, C., MUSSEL, J., AND SCHOBBER, H. A parametric strategy for freeform glass structures using quadrilateral planar facets. In *Automation in Construction*, 2004
- [GAL00] GALLIER J. : Embedding an affine space in a vector space In *Geometric methods and applications : for computer science and engineering*, pages 70–86. Springer-Verlag, London, UK, 2000.